Analyse de sensibilité des modèles de simulation

Samuel Buis

UMR 1114 EMMAH 84914 Avignon

Formation Modélisation ECCOREV, 26 octobre 2014

Plan

- Introduction des concepts
- Quelques exemples de méthodes
- L’analyse de sensibilité en pratique

Plan

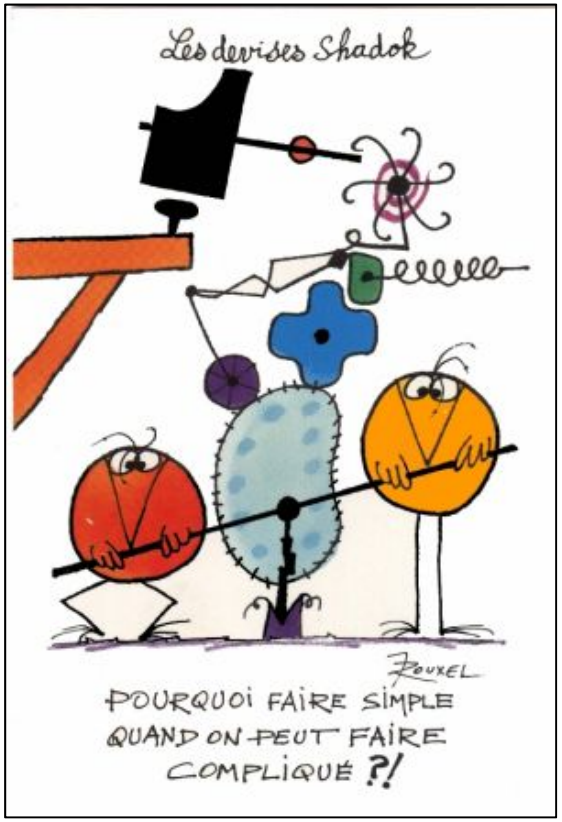
- Introduction des concepts
- Quelques exemples de méthodes
- L’analyse de sensibilité en pratique

Introduction des concepts

Problématique

Les modèles deviennent complexes
… trop complexes !

- Le modèle fonctionne t'il correctement ? Répond-il de manière appropriée aux variations des paramètres ?
- Quels processus sont prédominant dans le système étudié ? Quels processus interagissent ?
- Quel est le poids des incertitudes des différents paramètres d'entrée sur la simulation des sorties ? Quels paramètres devrais-je estimer avec plus de précision pour réduire les incertitudes de la sortie simulée ? Quels sont ceux que je peux fixer sans conséquences ?
- …



→ On souhaite étudier l'effet respectif des entrées d'un modèle sur ses variables de sortie : c'est l'analyse de sensibilité

Introduction des concepts

Le Modèle

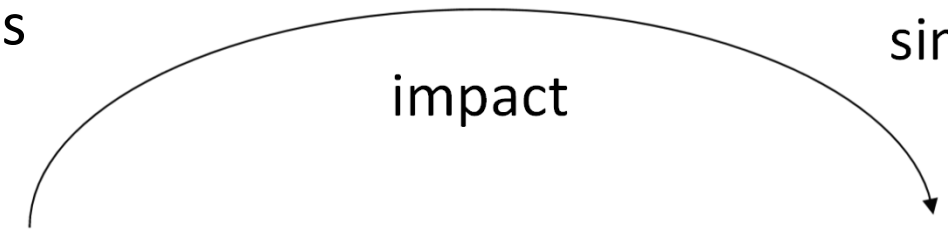
Code informatique

$$f : D_x \subset \Re^k \rightarrow D_y \subset \Re^l$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

CI,CL,forçages,
paramètres

Variables
simulées



Facteurs

Variables d'intérêt

Analyse de sensibilité

Introduction des concepts

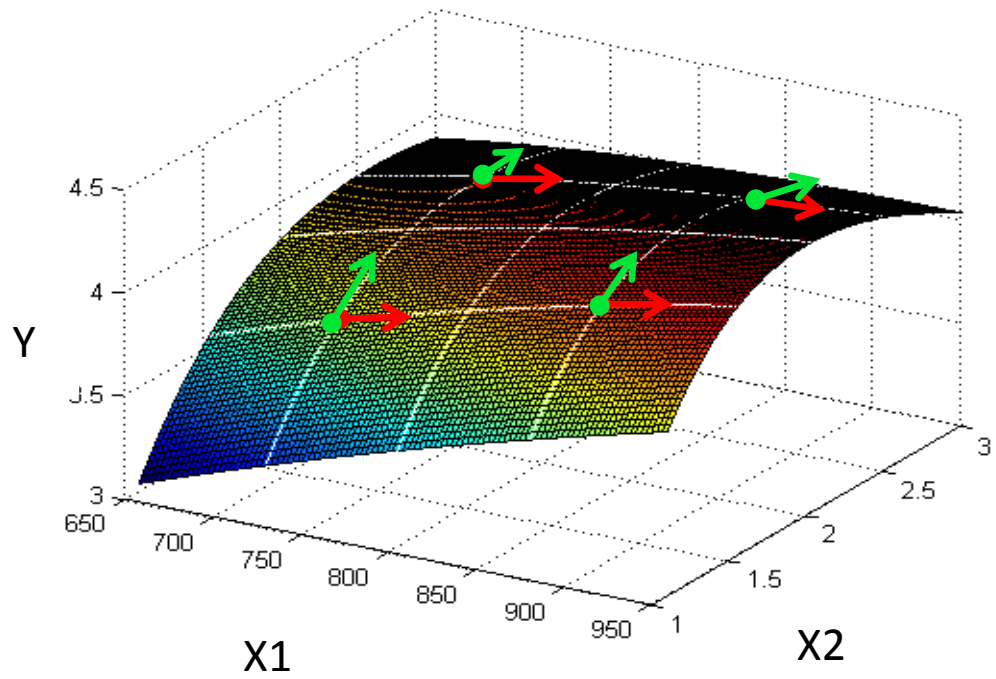
Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}$$

~ **taux d'accroissement** d'une variable par rapport à un facteur en un point donné

Calculable par différences finies ou par code adjoint

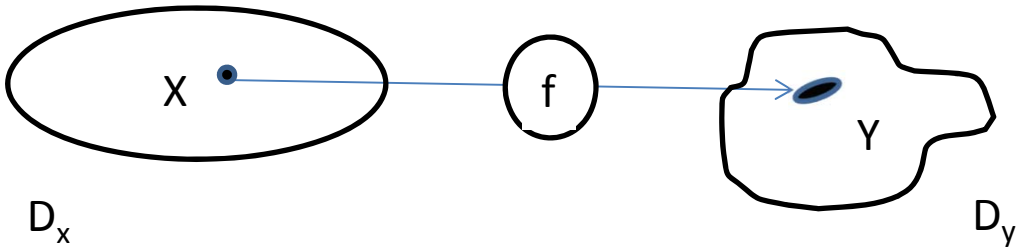
Information purement locale → partielle en cas de fortes non-linéarités.



Introduction des concepts

Méthodes locales et globales

Méthodes Locales : effet d'une **faible perturbation autour d'un point de l'espace des facteurs**.



La perturbation est appliquée facteur par facteur (méthodes **One-At-a-Time**)

→ approches déterministes
→ informatives sur phénomènes locaux
→ applicables aux modèles coûteux et/ou à beaucoup de paramètres (modèle spatiaux, …).

Introduction des concepts

Méthodes locales et globales

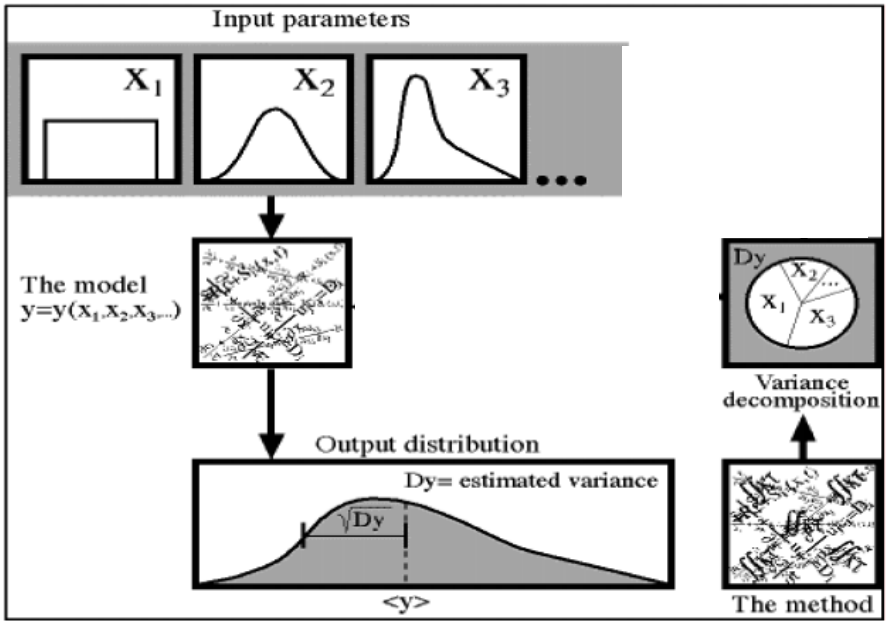
Méthodes Globales : les facteurs varient simultanément et dans toute la gamme de valeurs étudiée.

→ Approches stochastiques basées sur un échantillonnage de l'espace des facteurs,

→ Souvent gourmandes en nombre de simulations.

Ex. : Méthodes basées sur la variance

X et Y sont considérées comme des variables aléatoires. On cherche à estimer la proportion de variance de Y expliquée par les différents facteurs étant donnée leur loi de distribution.



Source : Saltelli et al. 2000

Introduction des concepts

Décomposition de la variance (I)

Pour tout modèle f(x) défini et intégrable sur le domaine D_x, il existe une **décomposition fonctionnelle unique** (Hoeffding 1948, Sobol' 1993) :

$$f(x) = f_0 + \sum_i f_i(x_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, x_j) + \ldots + f_{12\ldots k}(x_1, \ldots, x_k)$$

où les fonctions f_* sont mutuellement **orthogonales** sur le domaine D_x

Soit la variable aléatoire Y=f(X), avec X **variable aléatoire** de loi de probabilité fixée.

$$f_0 = E(Y)$$

$$f_i(x_i) = E(Y | X_i = x_i) - f_0$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = E(Y | X_i = x_i, X_j = x_j) - f_0 - f_i(x_i) - f_j(x_j)$$

...

Introduction des concepts

Décomposition de la variance (II)

Si les Xi sont **indépendantes** entre elles, on a alors :

$$V(Y) = \sum_i V(f_i(x_i)) + \sum_i \sum_{j \neq i} V(f_{ij}(x_i, x_j)) + \ldots + V(f_{12\ldots k}(x_1, \ldots, x_k))$$

Avec :

$$V(f_i(x_i)) = V_i = V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}(Y | X_i))$$

$$V(f_{ij}(x_i, x_j)) = V_{ij} = V_{X_i, X_j}(E_{X_{\sim i,j}}(Y | X_i, X_j)) - V_i - V_j$$

$\ldots$

On peut donc **exprimer la variance de Y en fonction de la somme des contributions** individuelles des différents facteurs et de leurs **interactions.**

Introduction des concepts

Indices de Sobol' (I)

On définit ainsi les **indices de sensibilité de Sobol'** (Sobol' 1993) :

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}(Y|X_i))}{V(Y)}$$

Indice de premier ordre : part de variance de Y expliquée par les variations de X_i indépendamment de la valeur des autres facteurs

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}$$

Indice d'ordre 2 : part de variance de Y due aux variations de X_i et X_j non expliquée par la somme de leurs effets propres

•••

On a : $$\sum_i S_i + \sum_i \sum_{j \neq i} S_{ij} + \ldots + S_{12\ldots k} = 1$$

Donc :

- $\sum S_i \leq 1$
- Si $\sum S_i = 1$ alors le modèle est additif
- $1 - \sum S_i \geq 0$ indique la présence d'interaction(s)

Introduction des concepts

Indices de Sobol' (II)

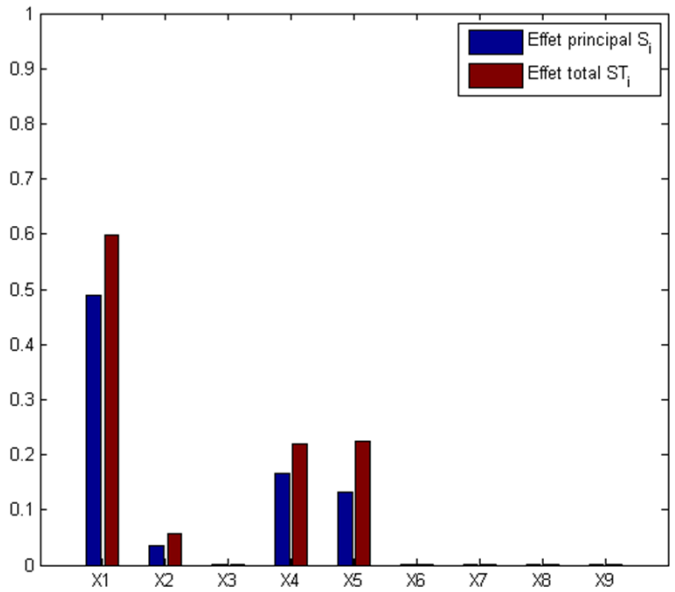
Le nombre total d'indice étant égal à 2^k-1, en pratique on calcule souvent l'**effet total** (Homma et Saltelli 1996) :

$$ST_i = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \ldots + S_{12\ldots k}$$

En utilisant le théorème de la variance totale, on a :

$$ST_i = 1 - \frac{V_{X_{\sim i}}(E_{X_i}(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} = \frac{E_{X_{\sim i}}(V_{X_i}(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)}$$

« … a good, synthetic, though non exhaustive characterisation of the sensitivity pattern for a model with k factors is given by the total set of first order terms plus the total effects. » Saltelli et al (2006).



Introduction des concepts

Remarques concernant les méthodes globales

- Les méthodes globales peuvent être basées sur autre chose que la variance : probabilité de dépasser un seuil, entièreté de la distribution (Borgonovo 2006), …

- Il y a un lien théorique entre dérivées partielles et indices de Sobol' (Kucherenko et al 2009, Roustant et al 2013)

Introduction des concepts

Les différentes familles de méthodes

Il existe une grande variété de méthodes (cf. Saltelli et al 2008, Faivre et al 2013).

Elle peuvent être classées de différentes façons :

- Locales / Globales / Screening (criblage : premier tri des facteurs à faible coût)
- Quantitatives / Qualitatives
- Graphiques / Déterministes / Stochastiques
- Sans hypothèses sur le modèle (model free ou boîtes noires) / avec hypothèses sur le modèle (boîtes blanches)
- …

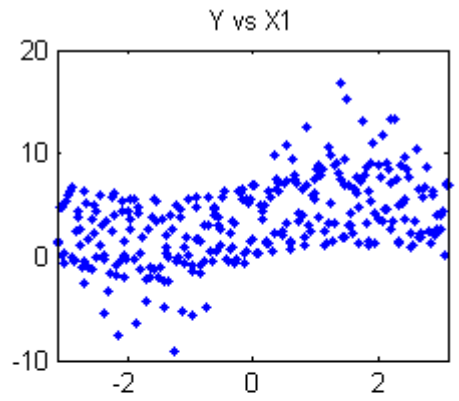
Plan

- Introduction des concepts
- Quelques exemples de méthodes
- L’analyse de sensibilité en pratique

Quelques exemples de méthodes

Méthodes graphiques : nuages de points (I)

- Echantillonner X avec N>>k,
- Réaliser les simulations correspondantes,
- Tracer les nuages de points de Y en fonction des Xi.

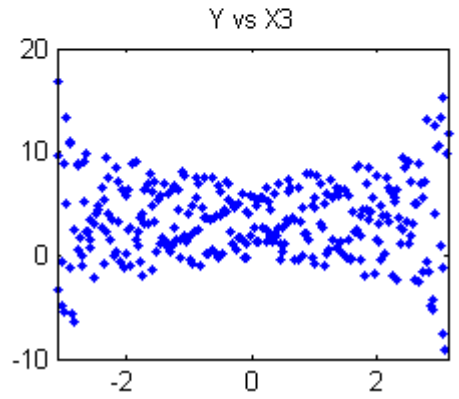


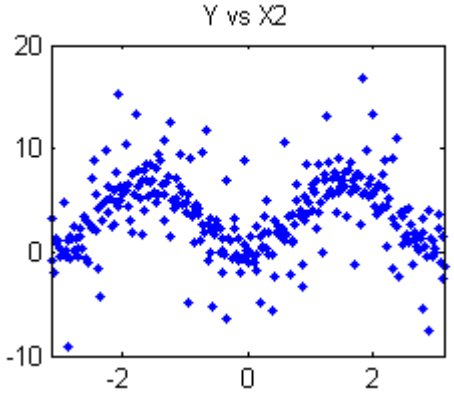
Modèle d'Ishigami (Ishigami and Homma,1990)

$$Y = \sin X_1 + A \cdot \sin^2 X_2 + B \cdot X_3^4 \cdot \sin X_1$$

Xj ~U(-pi,pi),
A=7 et B=0.1

N=300





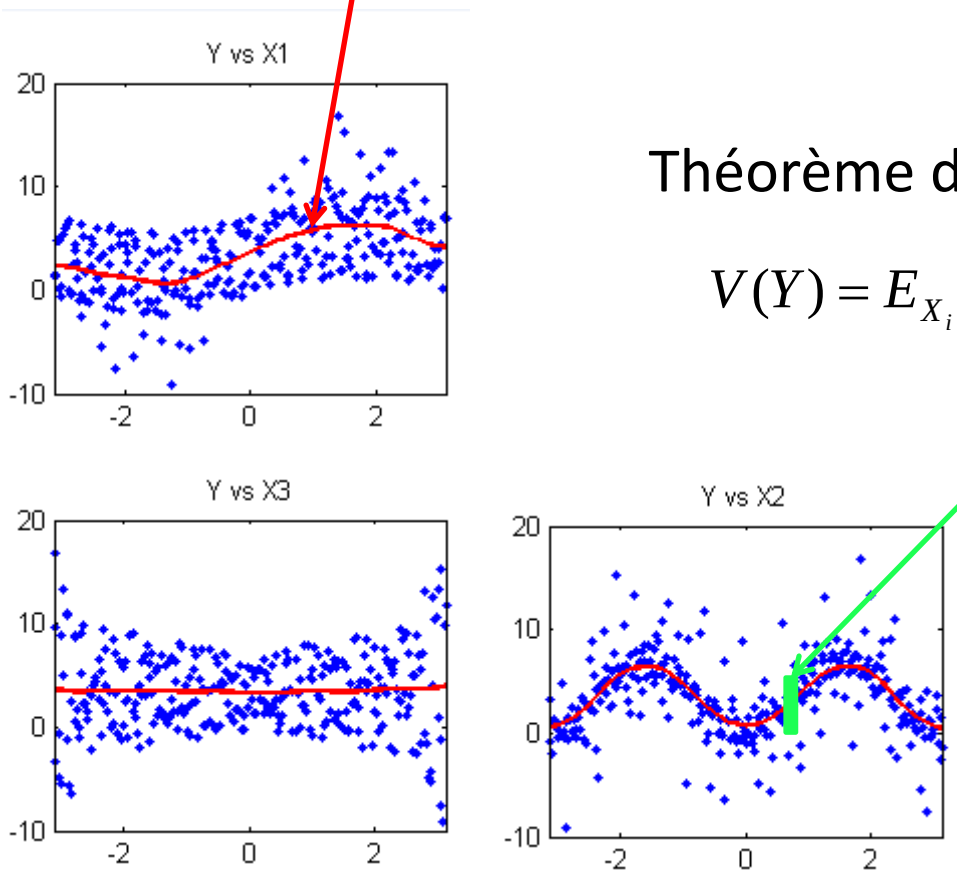
→ informations qualitatives plus ou moins apparentes sur l'effet des paramètres : force, sens de variation, présence d'interactions, …

Quelques exemples de méthodes

Méthodes graphiques : nuages de points (II)

$$S_i = \frac{V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}(Y|X_i))}{V(Y)}$$

Variance expliquée par le modèle de régression $E_{X_{\sim i}}(Y|X_i)$



Théorème de la variance totale :

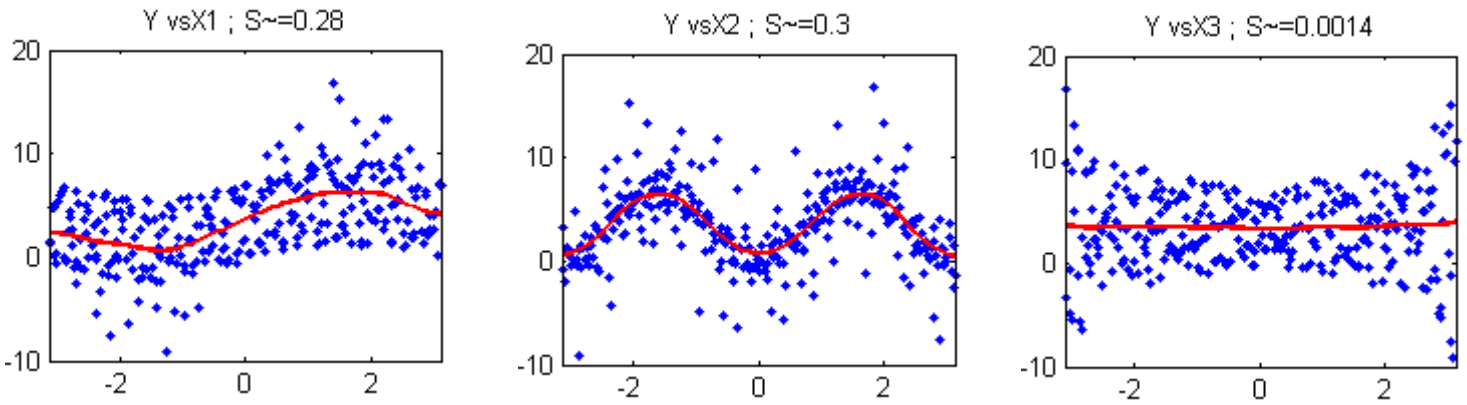
$$V(Y) = E_{X_i}(V_{X_{\sim i}}(Y|X_i)) + V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}(Y|X_i))$$

Effets liés aux autres paramètres
= erreur résiduelle du modèle de régression $E_{X_{\sim i}}(Y|X_i)$

Quelques exemples de méthodes

Méthodes graphiques : nuages de points (III)

→ Une estimation grossière de S peut être obtenue en calculant la variance empirique d'une estimation de la moyenne conditionnelle (moyenne mobile, méthodes à noyau, polynômes locaux, …).



	S_{Xi}	ST_{Xi}
X_1	0.31	0.56
X_2	0.44	0.44
X_3	0	0.24

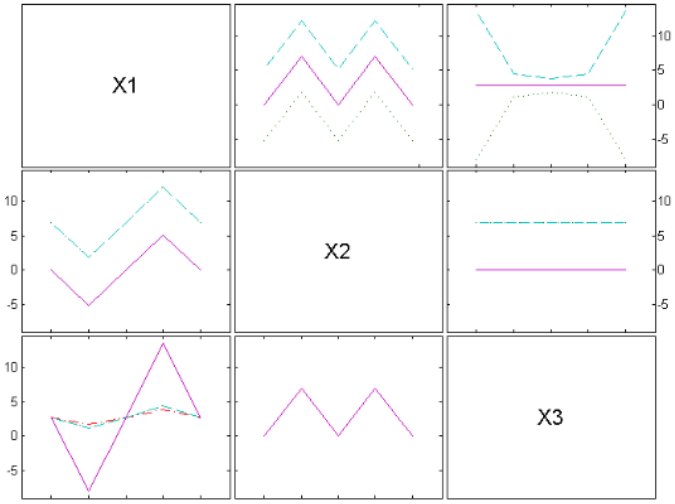
Valeurs théorique des indices de Sobol' pour le modèle Ishigami

	S_{Xi}
X_1	0.28
X_2	0.3
X_3	0.001

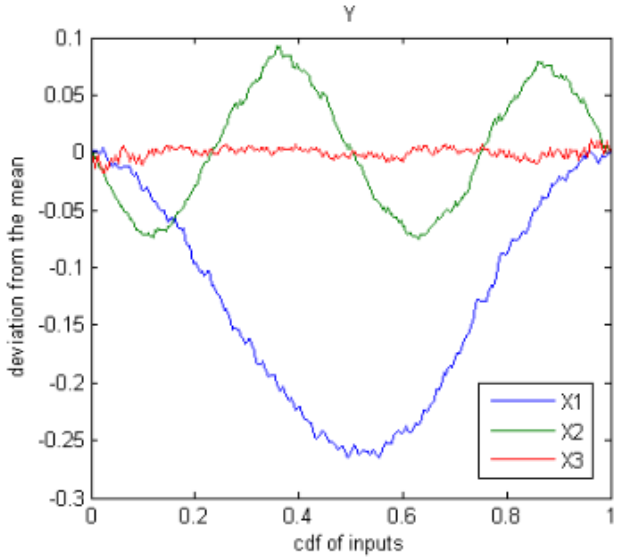
Valeurs approchées des indices principaux (n=300, estimation de la moyenne conditionnelle par méthode à noyau).

Quelques exemples de méthodes

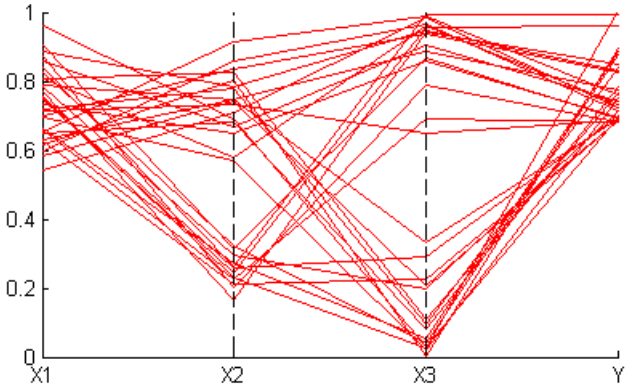
Méthodes graphiques : à voir aussi



Interaction plot



CUSUNORO plot (Plischke 2012)



Cobweb plot

- Techniques globales, faciles à mettre en œuvre.
- Complémentaires des indices quantitatifs intégrateurs
- Effets parfois difficiles à détecter et qualifier surtout si beaucoup de facteurs.

→ Etape conseillée avant toute analyse globale quantitative.

Quelques exemples de méthodes

Méthodes de screening : la méthode de Morris

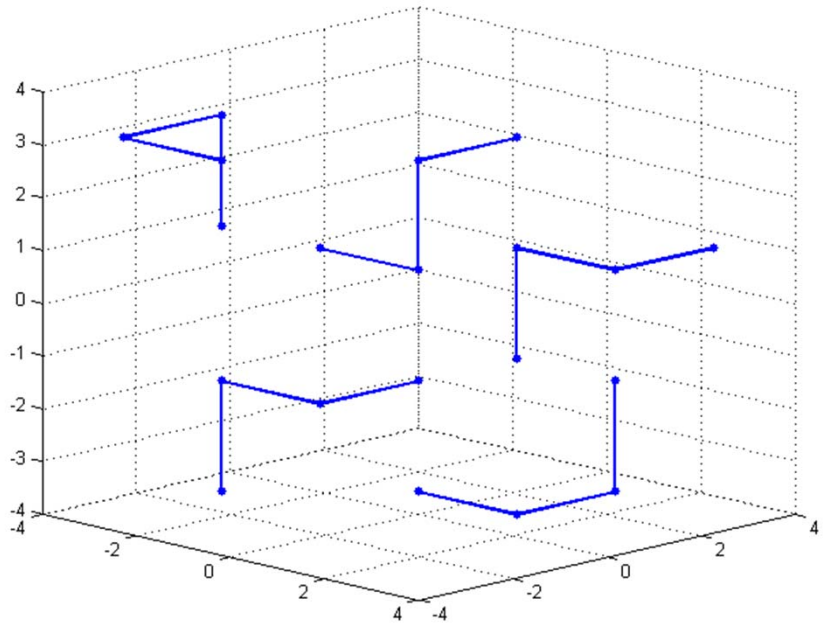
(Morris 1991, Campolongo 2007)

Effets élémentaires One-At-a-Time :

$$EE_i(x) = \frac{\left[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x) \right]}{\Delta}$$

Plan d'expérience :

- Tirage aléatoire de r points sur une *grille régulière* de dimension k et à p niveaux
- Création de r trajectoires de k+1 points en augmentant ou diminuant tour à tour d'un niveau chaque composante du vecteur des facteurs.



Coût : r(k+1) simulations

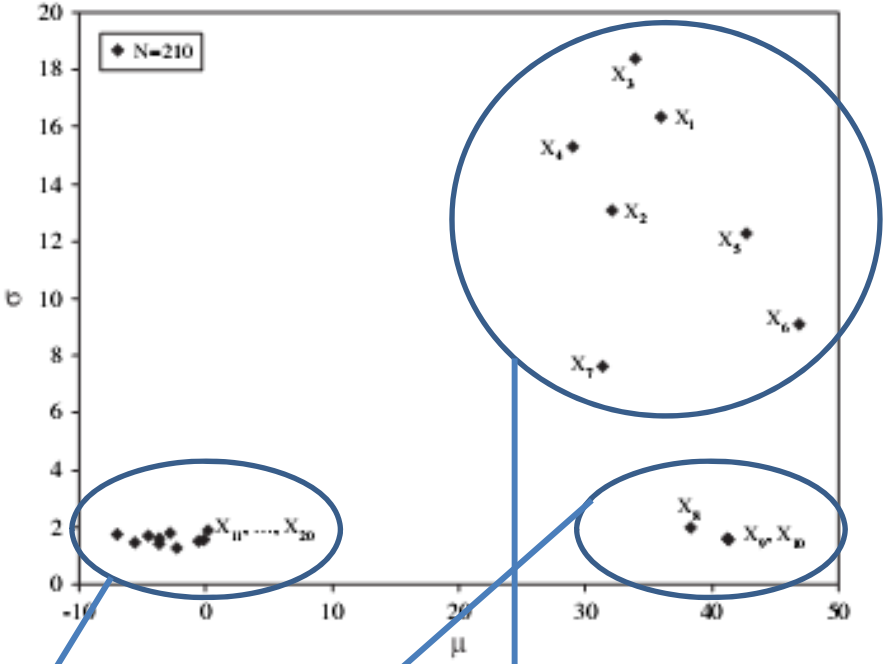
Quelques exemples de méthodes

Méthodes de screening : la méthode de Morris

- **Indices de sensibilité** :
  - μ_i la moyenne des EE_i,
  - σ_i l'écart type des EE_i,
  - μ_i^* la moyenne des $|EE_i|$

μ^* permet de classer les facteurs par ordre d'importance.

Source : Campolongo et al 2007



	σ_i faible	σ_i élevé
$\lvert\mu_i\rvert$ faible	facteur négligeable	facteur influent, effet non monotone et/ou interactions
$\lvert\mu_i\rvert$ élevée	facteur influent, effet linéaire	facteur influent, effet non linéaire et/ou interactions

Quelques exemples de méthodes

Méthodes de screening : la méthode de Morris

→ permet à moindre coût et sans hypothèses sur la forme du modèle de déterminer quels facteurs peuvent être considérés comme ayant un effet :

- négligeable,
- linéaire et additif,
- non-linéaire ou en interaction avec d'autres paramètres.

Voir Campolongo et al (1999, 2007), Cariboni et al (2007) pour des applications.

Quelques exemples de méthodes

Méthodes de screening : à voir aussi

- Derivative-based Global Sensitivity Measure (DGSM : Kucherenko et al 2009, Sobol et Kucherenko 2009)

- Des méthodes peu voire très peu coûteuses mais nécessitant des hypothèses sur la forme du modèle :
  - Plan fractionnaires
  - Plans supersaturés, criblage par groupe, bifurcation séquentielle, …

  (cf. Kleijnen 2005)

Exemples de méthodes

Méthodes basées sur la variance : La méthode de Sobol'

$$S_i = \frac{V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}(Y|X_i))}{V(Y)} = \frac{V_i}{V}$$

$$V_i = V_{X_i}(E_{X_{\sim i}}[Y|X_i]) = E_{X_i}[E_{X_{\sim i}}[Y|X_i]^2] - E_{X_i}[E_{X_{\sim i}}[Y|X_i]]^2$$

$$\Rightarrow V_i = E_{X_i}[E_{X_{\sim i}}[Y|X_i]^2] - E[Y]^2$$

Sobol' (1993) propose : $\hat{V}_i = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x^A_{(\sim i)m}, x^A_{im}) f(x^B_{(\sim i)m}, x^A_{im}) - \bar{Y}^2$

où x^A et x^B sont 2 N-échantillons de réalisations du vecteur d'entrée X et $\bar{Y}$ est la moyenne empirique.

Exemples de méthodes

Méthodes basées sur la variance : La méthode de Sobol'

$$A \begin{pmatrix} x_{1,1}^{A} & \cdots & x_{1,k}^{A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1}^{A} & \cdots & x_{N,k}^{A} \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x_{1,1}^{B} & \cdots & x_{1,k}^{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1}^{B} & \cdots & x_{N,k}^{B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}^{B} & \cdots & x_{1,i}^{A} & \cdots & x_{1,k}^{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1}^{B} & \cdots & x_{N,i}^{A} & \cdots & x_{N,k}^{B} \end{pmatrix} \quad C_i$$

$$\hat{V}_i = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} \overbrace{f(x_{(\sim i)m}^{A}, x_{im}^{A})}^{f(A)} \overbrace{f(x_{(\sim i)m}^{B}, x_{im}^{A})}^{f(C_i)} - \bar{Y}^2$$

→ N(k+1) simulations pour estimer tous les indices de 1er ordre

Exemples de méthodes

Méthodes basées sur la variance : La méthode de Sobol'

$$ST_i = 1 - \frac{V_{X_{\sim i}}(E_{X_i}(Y|X_{\sim i}))}{V(Y)} = 1 - \frac{V_{\sim i}}{V}$$

$$V_{\sim i} = E_{X_{\sim i}}[E_{X_i}[Y|X_{\sim i}]^2] - E_{X_{\sim i}}[E_{X_i}[Y|X_{\sim i}]]^2$$

$$\Rightarrow V_{\sim i} = E_{X_{\sim i}}[E_{X_i}[Y|X_{\sim i}]^2] - E[Y]^2$$

Selon le même principe, on a :

$$\hat{V}_{\sim i} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x^A_{(\sim i)m}, x^A_{im}) f(x^A_{(\sim i)m}, x^B_{im}) - \overline{Y}^2$$

→ N simulations supplémentaires pour estimer l'indice total d'un facteur

Exemples de méthodes

Méthodes basées sur la variance : La méthode de Sobol'

De nombreuse améliorations ont été apportées à cette méthode en faisant un meilleur usage des simulations ou en proposant des méthodes d'échantillonnages adaptées.

Parmi celles-ci :

- Saltelli et al. 2002 : les indices Si et STi peuvent être calculés en N(k+2) évaluations, N(2k+2) pour avoir en plus les indices de second ordre
- Mara 2008, Tissot 2012 : estimation des indices Si indépendante de k
- Sobol 2007, Owen 2013 : amélioration des formules pour les petits indices
- Owen 2012 : revue des travaux récents
- …

Exemples de méthodes

Méthodes basées sur la variance

Ces méthodes ne nécessitent **aucune hypothèse sur la forme du modèle** et permettent d'**explorer tout l'espace des facteurs** en **prenant en compte les interactions.**

Mais elles **nécessitent plusieurs milliers à plusieurs dizaines de milliers de simulations …**

D'autres méthodes que la méthode de Sobol' permettent de calculer les indices de Sobol' :

- La méthode FAST et ses variantes (Cukier 1973, Saltelli 1999, Tarantola et al 2006, Mara 2009)
- Calcul analytique des indices sur un métamodèle (Sudret 2008, …)
- …

Plan

- Introduction des concepts
- Quelques exemples de méthodes
- L’analyse de sensibilité en pratique

L’analyse de sensibilité en pratique

Les différentes étapes

- Définir l’objectif
- Sélectionner les facteurs et définir leur espace de variation
- Choisir les indices appropriés et la méthode pour les calculer
- Calculer les indices

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Définir l'objectif

Essentiel pour :

- fixer le cadre de l'étude et choisir les facteurs, leur domaine de définition, les variables d'intérêt, les indices et les méthodes.
- Eviter les erreurs de Type III (Dunn 1997) : répondre correctement à la mauvaise question.

Exemple :

- Quels paramètres puis-je fixer à une valeur nominale sans que cela n'impacte la sortie y_j ?
- Sur quelles entrées du modèle faut-il réduire l'incertitude pour diminuer significativement l'incertitude sur les sorties ?
- Quelles entrées du modèle conduisent la sortie y_j au-dessus d'un seuil fixé ?
- …

L'Analyse de Sensibilité en pratique

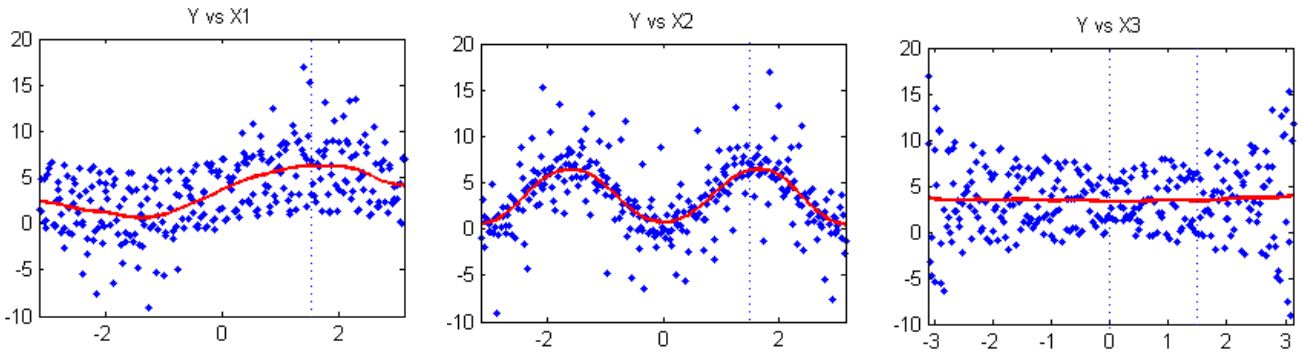
Définir l'espace de variation des facteurs

- Différentes sources d'informations exploitables : littérature, expertise (élicitation, cf. Oakley et O'Hagan 2007), mesures expérimentales directes ou indirectes (méthodes inverses), …
- Etape fondamentale car ces choix peuvent impacter fortement les résultats

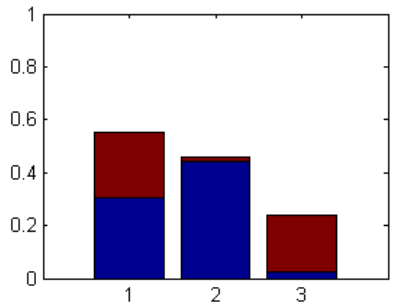
Exemple des indices de Sobol' pour le modèle Ishigami pour :

(a) X1~U[-π, π] ; X2~U[- π, π] ; X3~U[- π, π]

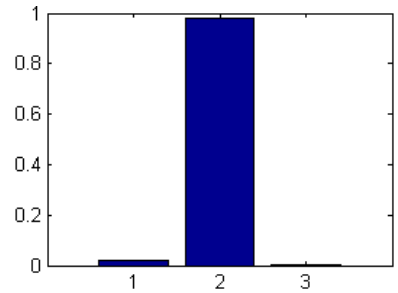
(b) X1~U[π/2, π] ; X2~U[π/2, π] ; X3~U[0, π/2]



(a)



(b)



L'Analyse de Sensibilité en pratique

Choisir la méthode

Le choix de la méthode dépend :

- De l'information requise (qualitative / quantitative, type d'indice, …)
- Du nombre de facteurs étudiés,
- De la nature des facteurs (discrets, continus),
- Du coût en temps de calcul du modèle et des moyens de calcul à disposition,
- De la complexité du modèle (non linéarités, discontinuités, non-monotonie, intéractions, …).
- …

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Choisir la méthode

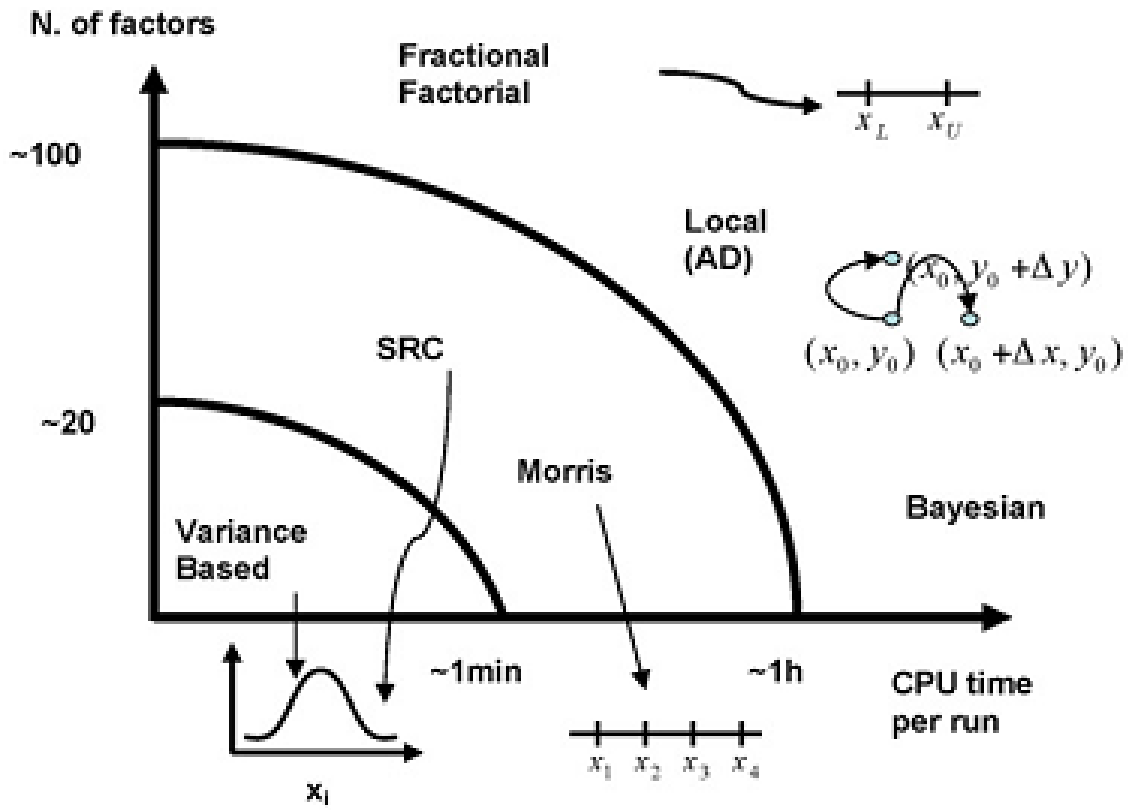
Saltelli et al 2004 décrivent des classes de problème et leur lien avec les indices de Sobol' :

- **Factor Fixing :** Identifier les facteurs dont l'influence sur une sortie d'intérêt est négligeable -> STi très faible ;
- **Factor Prioritisation :** Identifier la liste des facteurs à estimer pour réduire au maximum l'incertitude sur une sortie d'intérêt : Si les plus élevés ;
- **Factor Mapping :** Identifier les facteurs qui mènent une sortie dans une région d'intérêt : analyse de sensibilité régionale (RSA) ;
- **Variance Cutting :** Identifier la liste minimale de facteur pour faire baisser la variance d'une sortie en dessous d'un seuil donné : $\min_{n} S_{i1\ldots in}$ tel que $1 - S_{i1\ldots in} < \frac{seuil}{V(Y)}$

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Choisir la méthode

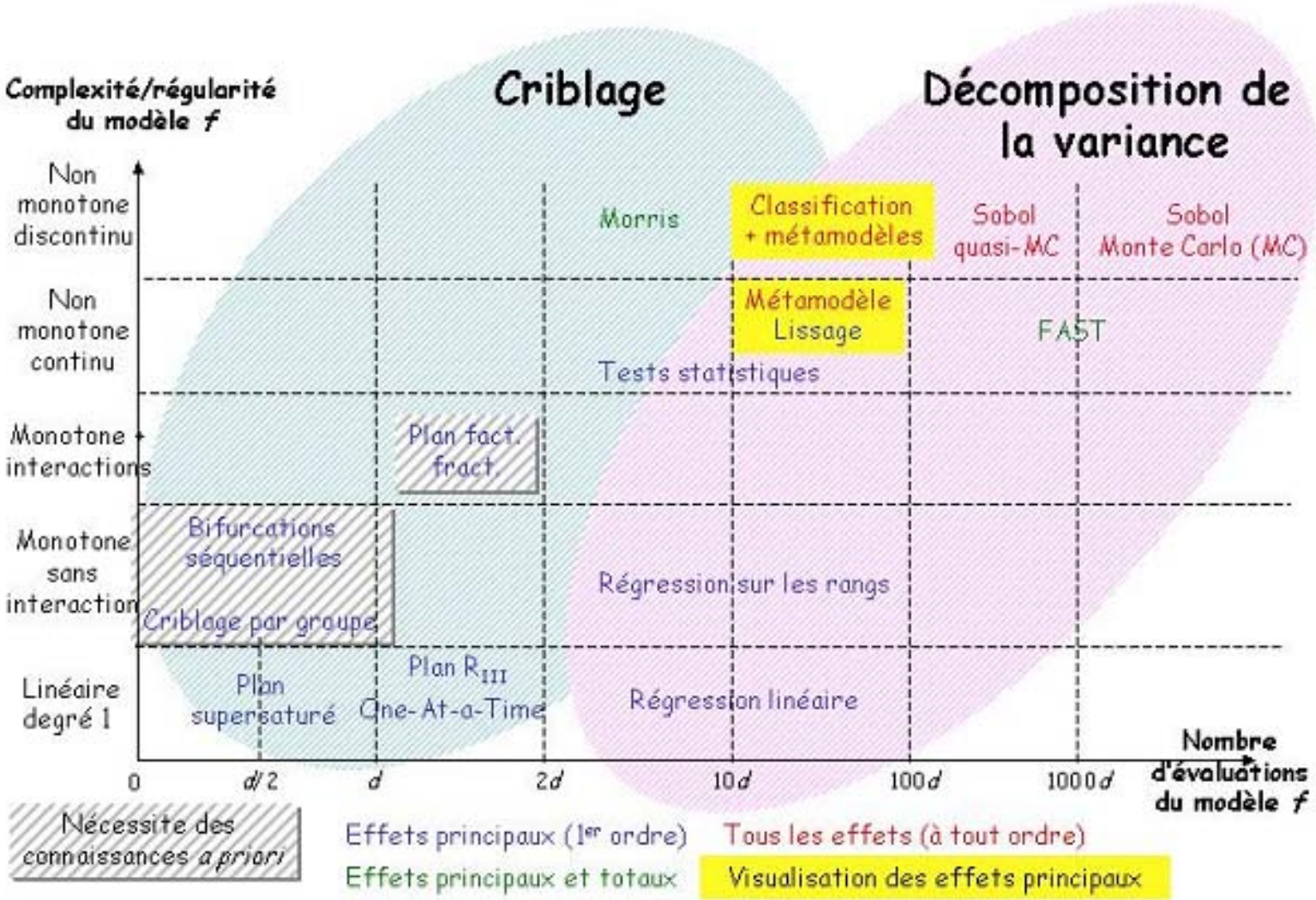
Cariboni et al (2007) proposent un diagramme qui classe quelques méthodes classiques en fonction du coût du modèle et du nombre de facteurs :



L'Analyse de Sensibilité en pratique

Choisir la méthode

Iooss (2011) propose un diagramme plus détaillé fonction du nombre d'évaluation du modèle et de sa complexité :



L'Analyse de Sensibilité en pratique

Choisir la méthode

L'utilisation successive de plusieurs méthodes est fréquente :

- en cas de nombre de facteurs élevé : criblage puis méthode quantitative (cf. Campolongo et al 1999, Cariboni et al 2007) ;
- quand on souhaite explorer le comportement du modèle, pour profiter de la complémentarité des informations apportées par les méthodes (graphiques, locales, Morris, basées sur la variance, indépendantes des moments, …)
- …

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Calculer les indices en pratique : les différentes étapes

La plupart des méthodes sont basées sur 3 étapes successives :

1. Génération du plan d'expérience

2. Réalisation des simulations

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{f(x)}} \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,l} \\ y_{2,1} & \cdots & y_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3. Calcul des indices

Si, Sij, STi

μi, σi

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x)$$

...

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Calculer les indices en pratique : le plan d'expérience

- Souvent lié à la méthode de calcul des indices … mais pas toujours : EASI (Plischke 2010), méthode indépendante des moments (Plischke 2013), méthodes basées sur la régression (SRC, …), …

- Pour les méthodes stochastiques, basé sur un échantillonnage de la loi de probabilité des facteurs :
    - Différentes méthodes : Pseudo-Random, Quasi-Monte Carlo, Hypercube Latin (LHS), … (cf. Faivre et al 2013)
    - Quelle taille pour l'échantillon ? Le choix de N dépend de la dimension du problème, de la complexité du modèle, de la précision souhaitée sur les indices, …

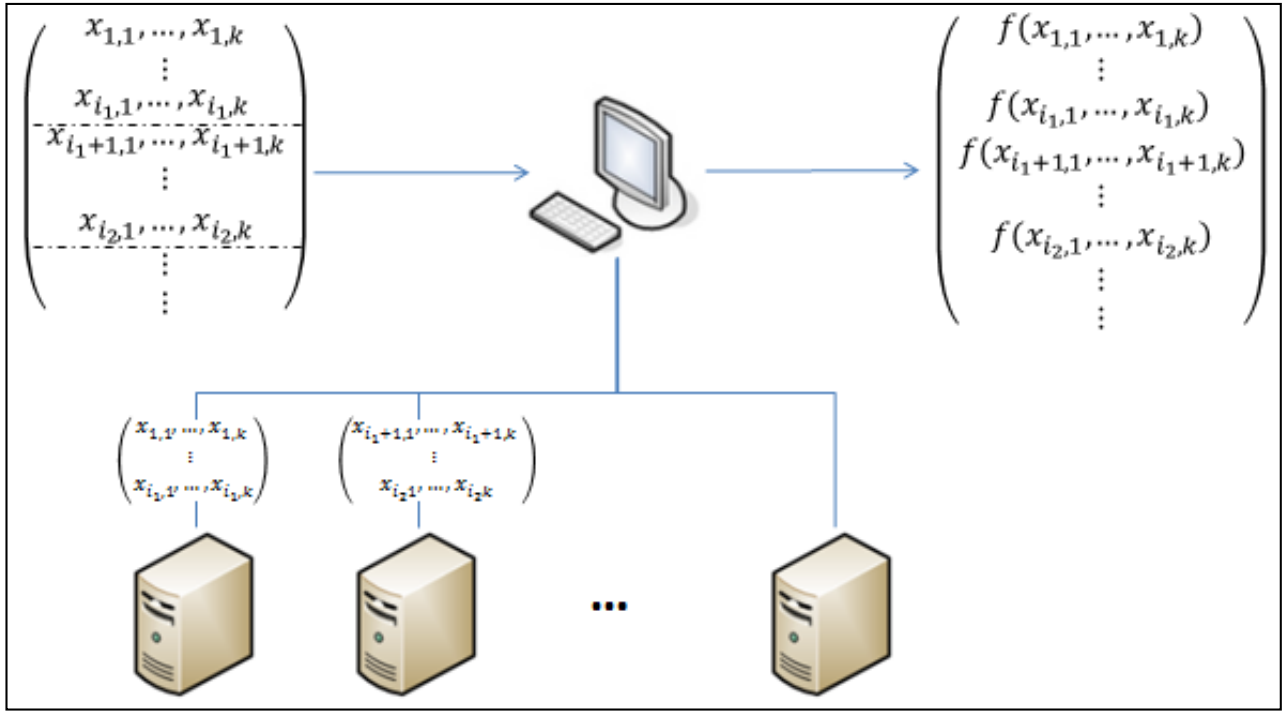
    → Évaluer la précision des indices et ajuster N en fonction.

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Calculer les indices en pratique : réalisation des simulations

Phase critique pour le coût de l'analyse de sensibilité : plusieurs dizaines de simulations à plusieurs dizaines de milliers de simulations nécessaires selon les méthodes.

… mais la plupart des méthodes sont hautement et facilement parallélisable.



L'Analyse de Sensibilité en pratique

Calculer les indices en pratique : Logiciels

- Package R :
  - sensitivity,
  - planor,
  - Dice***,
  - CompModSA,
  - …
- Fonctions Matlab :
  - cf. site du JRC,
  - SAinterface
  - DACE
  - …
- Autres :
  - OpenTURNS (librairie Python)
  - SIMLAB,
  - TAPENADE (logiciel de différentiation automatique)

…

L'Analyse de Sensibilité en pratique

Calculer les indices en pratique : incertitudes sur les indices

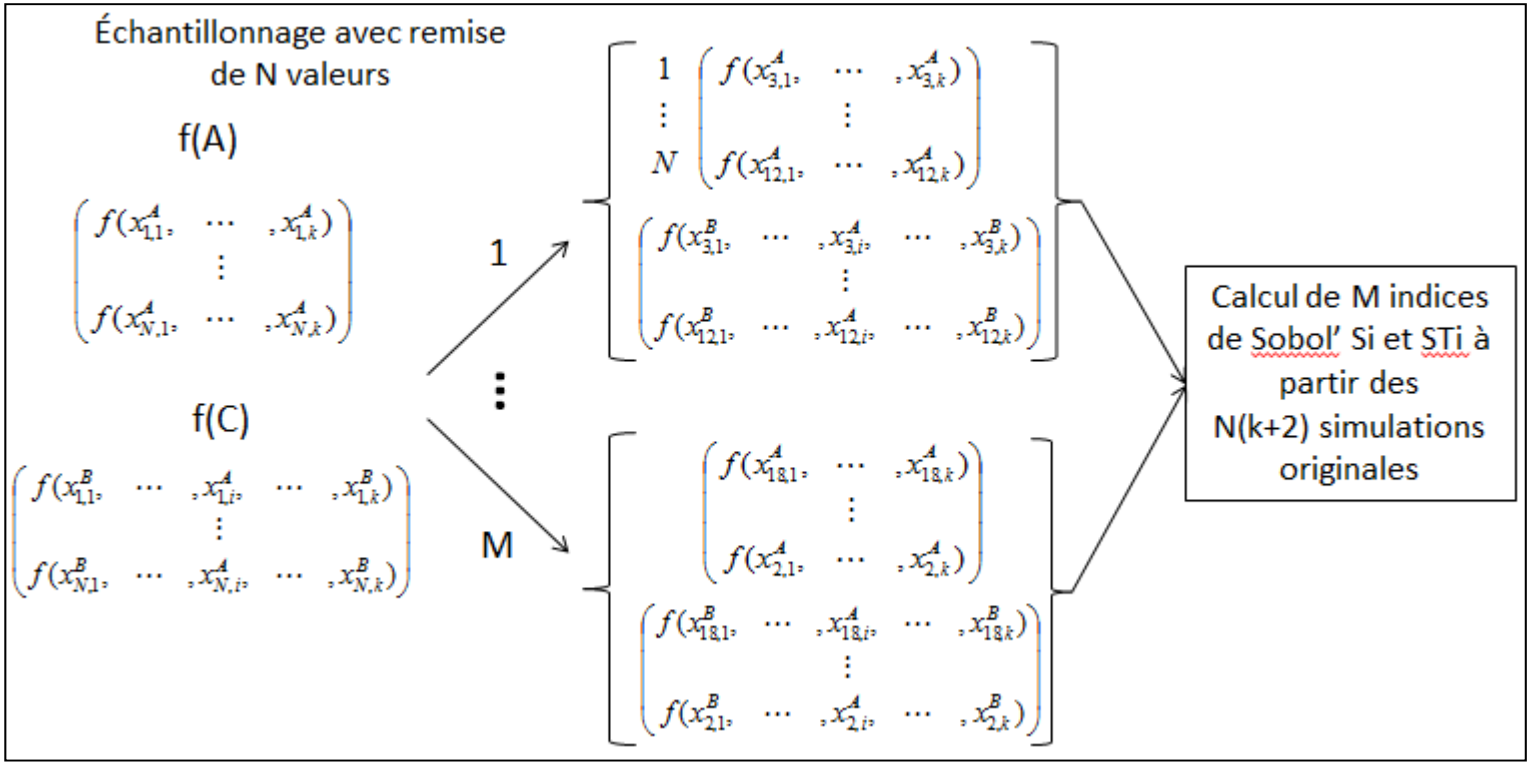
Qualité d'estimation des indices des méthodes globales liée au plan d'expérience → évaluer l'incertitude sur les indices :

- en répétant l'analyse avec des échantillonnages différents

ou

- par une procédure de ré-échantillonnage (bootstrap)

Principe du bootstrap appliqué à la méthode de Sobol'



L'Analyse de Sensibilité en pratique

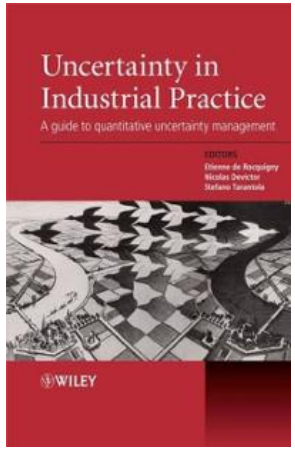
Quelques problématiques avancées …

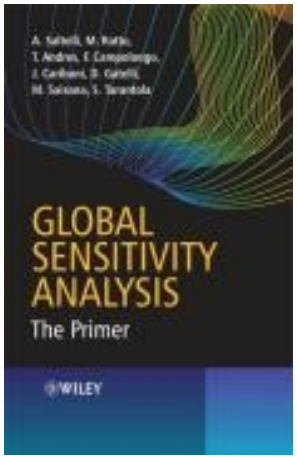
- Sorties multivariées (Lamboni et al 2011a)
- Facteurs dépendants (Jacques et al 2006, Rabitz 2010, Mara et Tarantola 2012, Kucherenko et al 2012, Chastaing et al 2012)
- Modèle spatiaux (Lilburne et Tarantola 2009, Saint-Geours et al 2014)
- Lien entre analyse de sensibilité globale et estimation de paramètres (Lamboni et al 2011b, Dobre et al 2010)
- …

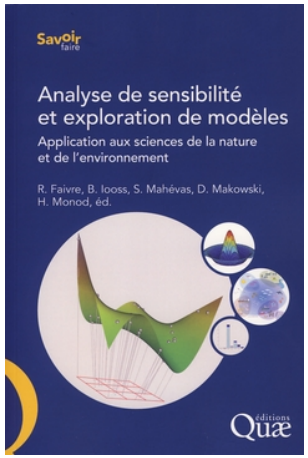
L'Analyse de Sensibilité en pratique

Pour plus d'informations …

- Une revue récente : looss 2011
- Des ouvrages :







- Sur le web :
  - Joint Research Centre
  - http://reseau-mexico.fr/
  - http://www.gdr-mascotnum.fr/
  - …

Bibliographie (I)

- Borgonovo, E., 2006. Measuring Uncertainty Importance: Investigation and Comparison of Alternative Approaches. Risk Analysis 26, 1349-1361.
- Cariboni, J., Gatelli, D., Liska, R., Saltelli, A., 2007. The role of sensitivity analysis in ecological modelling. Ecological Modelling 203, 167-182.
- Campolongo, F., Tarantola, S., & Saltelli, A. (1999). Tackling quantitatively large dimensionality problems. *Computer physics communications*, *117*(1), 75-85.
- Campolongo, F., Cariboni, J., Saltelli, A., 2007. An effective screening design for sensitivity analysis of large models. Environmental Modelling & Software 22, 1509-1518.
- Chastaing, G., Gamboa, F., & Prieur, C. (2012). Generalized hoeffding-Sobol decomposition for dependent variables-application to sensitivity analysis. *Electronic Journal of Statistics*, *6*, 2420-2448.
- Cukier, R. I. and Fortuin, C. M. and Shuler, K. E. and Petschek, A. G. and Schaibly J. H. (1973), "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory", *The journal of chemical physics*, 59, 3873-3877.
- Dobre, S., Bastogne, T., & Richard, A. (2010, July). Global sensitivity and identifiability implications in systems biology. In *11th IFAC Symposium on Computer Applications in Biotechnology, CAB 2010*.
- Faivre R., Iooss B., Mahévas S., Makowski D., Monod H., editors. Analyse de sensibilité et exploration de modèles. Applications aux modèles environnementaux. Collection « Savoir Faire », Quae, Versailles, 2013, 352p.
- HOEFFDING W. : A class of statistics with asymptotically normal distributions. Annals of Mathematical Statistics,19:293–325,1948.
- HOMMA, T, A. SALTELLI : Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models. Reliability. Engineering and System Safety,52:1–17,1996.
- B. Iooss. Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques.Journal de la Société Française de Statistique, 152(1):3–25, 2011.
- Ishigami, T. and Homma, T. (1990), "An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models.", in: *Proceedings of the ISUMA'90*, First International Symposium on uncertainty modelling and analysis, University of Maryland, USA, December 3-5, 1990, 398-403.
- Jacques, J., Lavergne, C., & Devictor, N. (2006). Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliability Engineering & System Safety*, *91*(10), 1126-1134.

Bibliographie (II)

- Kleijnen, J.P.C., 2005. An overview of the design and analysis of simulation experiments for sensitivity analysis. European Journal of Operational Research 164, 287-300.
- Kucherenko, S., Rodriguez-Fernandez, M., Pantelides, C., Shah, N., 2009. Monte Carlo evaluation of derivative-based global sensitivity measures. Reliability Engineering & System Safety 94, 1135-1148.
- Kucherenko, S., Tarantola, S., Annoni, P., 2012. Estimation of global sensitivity indices for models with dependent variables. Computer Physics Communications 183, 937-946.Lamboni, M., Monod, H., Makowski, D., 2011a. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. Reliability Engineering & System Safety 96, 450-459.
- Lamboni, M., Makowski, D., & Monod, H. (2011b). Indices de sensibilité, sélection de paramètres et erreur quadratique de prédiction: des liaisons dangereuses?. *Journal de la Société Française de Statistique*, *152*(1), 26-48.
- Lilburne, L., Tarantola, S., 2009. Sensitivity analysis of spatial models. International Journal of Geographical Information Science 23, 151-168.
- Mara, T.A., Joseph, O.R., 2008. Comparison of some efficient methods to evaluate the main effect of computer model factors. Journal of Statistical Computation and Simulation 78, 167-178.
- Mara, T.A., 2009. Extension of the RBD-FAST method to the computation of global sensitivity indices. Reliability Engineering & System Safety 94, 1274-1281.
- Mara, T.A., Tarantola, S., 2012. Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs. Reliability Engineering & System Safety 107, 115-121.
- Morris, M.D., 1991. Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. Technometrics 33, 161-174.
- Oakley, J. E., & O'Hagan, A. (2007). Uncertainty in prior elicitations: a nonparametric approach. *Biometrika*, *94*(2), 427-441.
- Owen, A. B. Better estimation of small Sobol' sensitivity indices. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS), 23(2):11,2013
- Owen , A. B. Variance components and generalized Sobol' indices. Journal of Uncertainty Quantification, 1(1):19{41, 2013.
- Plischke, E., 2010. An effective algorithm for computing global sensitivity indices (EASI). Reliability Engineering & System Safety 95, 354-360.
- Plischke E. An adaptive correlation ratio method using the cumulative sum of the reordered output. Reliab Eng Syst Saf. 2012;107:149–156

Bibliographie (III)

- Plischke, E., Borgonovo, E., Smith, C.L., 2013. Global sensitivity measures from given data. European Journal of Operational Research 226, 536-550.
- Rabitz, H., 2010. Global Sensitivity Analysis for Systems with Independent and/or Correlated Inputs. Procedia - Social and Behavioral Sciences 2, 7587-7589.
- Roustant, O., Fruth, J., Iooss, B., Kuhnt, S., 2014. Crossed-derivative based sensitivity measures for interaction screening. Mathematics and Computers in Simulation 105, 105-118.
- Saint-Geours, N., Bailly, J.-S., Grelot, F., Lavergne, C., 2014. Multi-scale spatial sensitivity analysis of a model for economic appraisal of flood risk management policies. Environmental Modelling & Software 60, 153-166.
- Saltelli, A., Bolado, R., 1998. An alternative way to compute Fourier amplitude sensitivity test (FAST). Computational Statistics & Data Analysis 26, 445-460.
- SALTELLI, A., K. CHAN et E.M. SCOTT, éditeurs. Sensitivity analysis. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley,2000.
- Saltelli, A., 2002. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. Computer Physics Communications 145, 280-297.
- A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, and M. Ratto, Sensitivity Analysis in Practice. A Guide to Assessing Scientific Models, John Wiley & Sons publishers, 2004.
- Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. (2008). Global Sensitivity Analysis. The Primer. Wiley.
- Sobol', I.M. (1993), "Sensitivity Analysis for Nonlinear Mathematical Models", *Mathematical Modeling & Computational Experiment*, 1, 407-414.
- Sobol, I.M., Kucherenko, S., 2009. Derivative based global sensitivity measures and their link with global sensitivity indices. Mathematics and Computers in Simulation 79, 3009-3017.
- Sobol, I.M., Tarantola, S., Gatelli, D., Kucherenko, S.S., Mauntz, W., 2007. Estimating the approximation error when fixing unessential factors in global sensitivity analysis. Reliability Engineering & System Safety 92, 957-960.
- Sudret, B., 2008. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. Reliability Engineering & System Safety 93, 964-979.
- Tarantola, S., Gatelli, D., Mara, T.A., 2006. Random balance designs for the estimation of first order global sensitivity indices. Reliability Engineering & System Safety 91, 717-727.