

Introduction aux modèles d'équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles

Lionel Roques

Journées Modélisation ECCOREV

INRA Biostatistique et Processus Spatiaux (BioSP) – Avignon



Modèles d'EDP en écologie des populations, idée générale

Description de la dynamique d'une population sous l'effet de deux forces :

la dispersion et la croissance (naissances-décès).

Applications en écologie :

- écologie de la conservation ;
- invasions biologiques, expansion d'aire de répartition ;
- génétique des populations.

Modèles d'équations différentielles ordinaires (EDO)

Modèles d'EDO, forme générale

Objectif : modéliser la dynamique d'une population sous l'effet d'un terme de croissance.

Equation :

$$\begin{cases} U'(t) = f(U(t)), & t \in [0, T[, \\ U(0) = U_0 \geq 0, \end{cases}$$

Inconnue : taille de la population $U(t)$ à chaque instant $t > 0$.

Donnée initiale : U_0 = taille initiale de la population.

Terme de croissance : $f \in C^1(\mathbb{R})$ est appelée *fonction de croissance*.

Obtention du terme de croissance

Population de taille $U(t)$. Accroissement :

$$U(t + \delta t) - U(t) = (\text{nb naissances} - \text{nb décès}) \text{ pendant } \delta t.$$

Taux de natalité a , de mortalité b .

$$U(t + \delta t) - U(t) = a U \delta t - b U \delta t.$$

Limite $\delta t \rightarrow 0$:

$$U' = a U - b U.$$

On définit donc

$$f(U) = (a - b) U.$$

Modèle de Malthus (Malthus 1798)

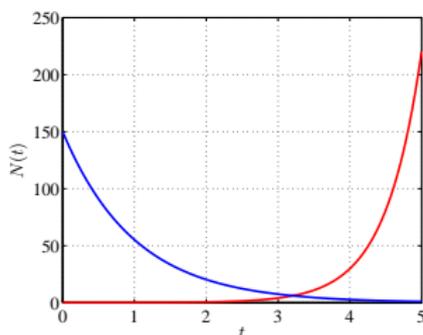
$$f(U) = (a - b) U$$

Hypothèse : a et b sont constants, indépendants de U .

Solution de $U' = f(U)$:

$$U(t) = U_0 e^{r t},$$

avec $r = a - b$, le taux de croissance de la population.



Courbe rouge : avec $U_0 = 0.01$ et $r = 2$;

En bleu : avec $U_0 = 150$ et $r = -1$.

→ croissance exponentielle si $r > 0$ (ou décroissance, si $r < 0$).

Modèle logistique (Verhulst 1838)

$$f(U) = (a - b)U$$

Hypothèse : le taux de mortalité b augmente avec la taille de la population : $b(U) = b_0 + b_1 U$, où $b_1 > 0$.

En posant $r = a - b_0$ et $K = \frac{a - b_0}{b_1}$, on obtient :

$$U'(t) = f(U) = rU \left(1 - \frac{U}{K} \right), \quad t \geq 0.$$

Définitions :

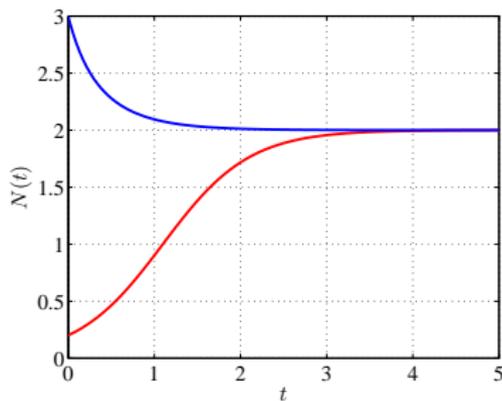
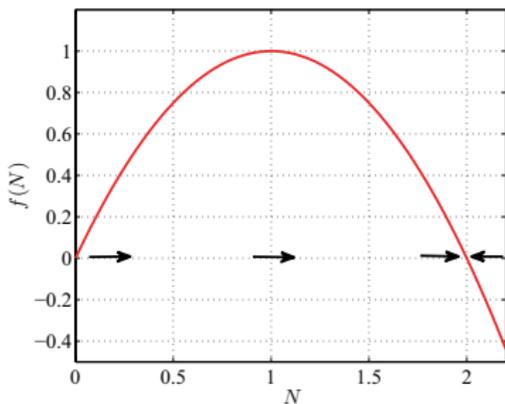
- r : taux de croissance intrinsèque;
- K : capacité d'accueil du milieu (exprimée en nombre d'individus) ;
- U^* tel que $f(U^*) = 0$: état stationnaire du modèle ($U' = f(U) = 0$ quand $U = U^*$).

Ici, deux états stationnaires, 0 et K .

Modèle logistique, stabilité des états stationnaires

$$U' = f(U) = rU \left(1 - \frac{U}{K}\right)$$

Ici, $r = 2$, $K = 2$.



Modèle avec effet Allee

Définition : taux de croissance *per capita* $g(U) = f(U)/U$.

Cas logistique : $g(U) = f(U)/U = r(1 - U/K) \rightarrow g(U)$ décroît avec U .

Effet Allee : $g(U)$ n'atteint pas son maximum en $U = 0$. Causes possibles :

- une difficulté à trouver des partenaires à faible densité ;
- la consanguinité (autofécondation chez les végétaux) ;
- une moins bonne résistance aux phénomènes climatiques extrêmes (processionnaire du pin, manchots).

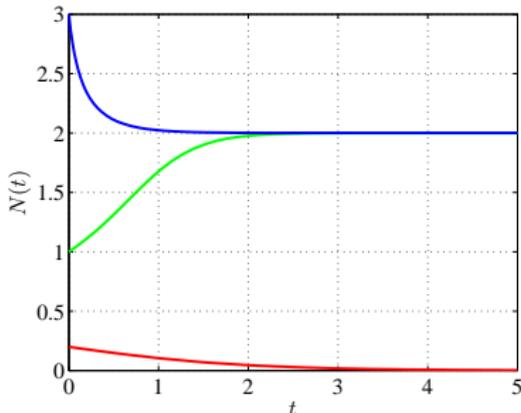
Définitions :

- *effet Allee fort* : $f(U) < 0$ quand U est petit (mortalité > natalité pour U petit) ;
- *effet Allee faible* : $f(U) \geq 0$, mais $g(U) = f(U)/U$ n'atteint pas son maximum en $U = 0$.

Modèle avec effet Allee : exemples

Effet Allee faible : $f(U) = U^2(1 - \frac{U}{K})$.

Effet Allee fort : $f(U) = U(1 - \frac{U}{K})(U - \rho)$, avec $\rho \in]0, K[$.



Effet Allee fort, avec $r = 2$, $K = 2$ et $\rho = 0.5$. *Courbe rouge* : $U_0 = 0.2$;
courbe verte : $U_0 = 1$; *courbe bleue* : $U_0 = 3$.

→ l'état final dépend de la donnée initiale.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Objectif : modéliser la dynamique de plusieurs populations en interaction.

Equation :

$$\begin{cases} U'(t) = F(U(t)), & t \in [0, T[, \\ U(0) = U^0. \end{cases}$$

Inconnue : $U = (U_1, \dots, U_k)$ est un vecteur de \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) décrivant les tailles de k populations éventuellement en interaction.

Donnée initiale : $U^0 = (U_1^0, \dots, U_k^0)$, tailles initiales des populations.

Terme de croissance : $F = (f_1, \dots, f_k) \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ décrit la croissance de chaque population, ainsi que les interactions entre populations.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles de prédateur-proie (Lotka, 1926 ; Volterra, 1926)

U_1 : taille de la population de proies (ou d'hôtes) ;

U_2 : taille de la population de prédateurs (ou parasites).

$$\begin{cases} U_1' = r_1 U_1 - \alpha_{12} U_1 U_2, \\ U_2' = -r_2 U_2 + \alpha_{21} U_1 U_2, \end{cases}$$

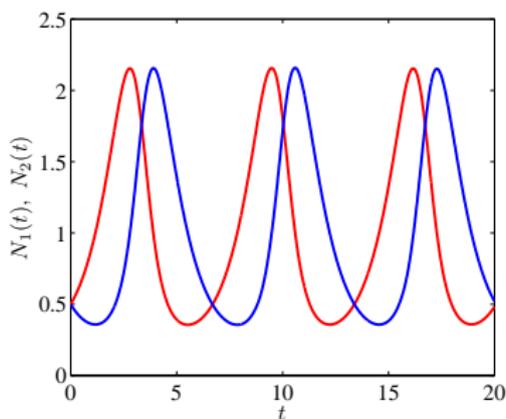
Interprétation :

- croissance malthusienne de la proie (taux r_1), en l'absence de prédateurs ;
- décroissance exponentielle du nombre de prédateurs (taux r_2), en l'absence de proies ;
- la prédation réduit le taux de croissance de la proie, proportionnellement à U_2 ;
- la capture de proies fait croître le taux de croissance du prédateur, proportionnellement à U_1 .

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles de prédateur-proie (Lotka, 1926 ; Volterra, 1926)

Intérêt théorique : montre que les interactions entre deux populations permettent de générer des dynamiques périodiques en temps.



Courbe rouge : la population de proies $U_1(t)$; *en bleu* : la population de prédateurs $U_2(t)$, $r_1 = r_2 = \alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$ et $U_1(0) = U_2(0) = 0.5$.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles de compétition du type Lotka-Volterra

Les inconnues $U_i(t)$, pour $i = 1, \dots, k$, correspondent à des populations en compétition :

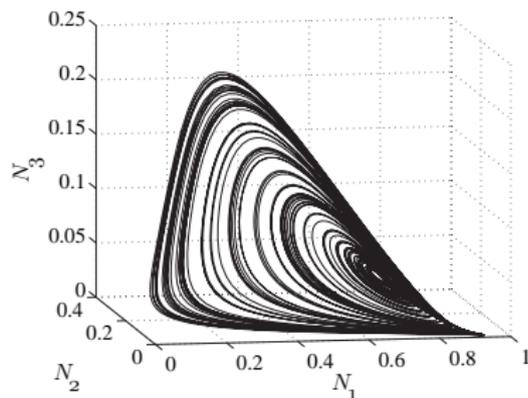
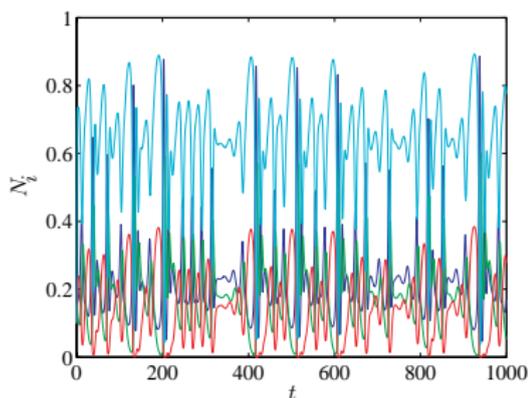
$$U_i' = r_i U_i \left(1 - \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} U_j \right),$$

- $r_i > 0$: taux de croissance intrinsèque de la population i ;
- $\alpha_{ij} \geq 0$: effet de la compétition de la population j sur la population i .

Intérêt : étudier le devenir de la biodiversité dans un système de populations en compétition les unes avec les autres.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles de compétition du type Lotka-Volterra



Solution chaotique d'un système de 4 populations en compétition.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles SIR

Modèles compartimentaux : plusieurs classes de populations, ici Susceptibles, Infectés et Résistants (immunisés ou morts... *recovered* ou *removed* en anglais).

L'exemple le plus simple de modèle SIR est le suivant :

$$\begin{cases} S' = -\alpha S I, \\ I' = \alpha S I - \beta I, \\ R' = \beta I. \end{cases}$$

Interprétation :

- les susceptibles (S) sont infectés avec un taux αI proportionnel au nombre d'infectés (I) ;
- les I deviennent immunisés (R) avec un taux constant β .

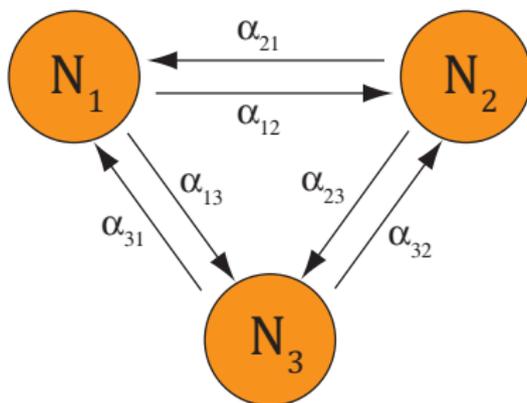
Applications : épidémiologie, par exemple modélisation de l'épidémie du VIH. Dans ce dernier cas, on distingue plusieurs classes d'individus infectés, avec des potentiels infectieux dépendant de leur charge virale.

Systèmes d'EDO : modèles multi-espèces

Modèles de métapopulations

Les inconnues $U_i(t)$, pour $i = 1, \dots, k$, correspondent à des tailles de sous-populations disjointes spatialement :

$$U_i' = f_i(U_i) - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(U_i) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ji}(U_j).$$



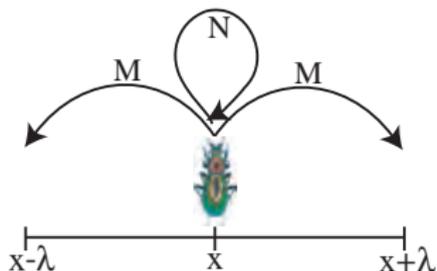
Représentation schématique d'un modèle de métapopulations à 3 sous-populations.

Intérêt : premier pas vers une *spatialisation* des modèles.

Equation de la diffusion en dimension 1 d'espace

Marches aléatoires et dispersion diffusive

Population de U individus indépendants. Marche aléatoire :



Pas de temps $\tau \ll 1$ pas d'espace $\lambda \ll 1$.

L'espérance de la densité de population (normalisée par U) $u(t, x)$ tend vers la solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec $D := \lim_{\tau \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0} M \frac{\lambda^2}{\tau} > 0$.

Autre façon d'obtenir l'équation : à partir de diffusions d'Itô (ex. : Brownien), correspond à l'équation de Kolmogorov (forward).

Marches aléatoires et dispersion diffusive

Quelques explications

Considérons **1 individu**.

$p(t, x)$: proba que l'individu soit à la position (t, x) .

$$p(t + \tau, x) = N p(t, x) + M p(t, x - \lambda) + M p(t, x + \lambda).$$

Développements limités :

$$\begin{aligned} p(t + \tau, x) &= p(t, x) + \tau \frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2), \\ p(t, x + \lambda) &= p(t, x) + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\lambda^3), \\ p(t, x - \lambda) &= p(t, x) - \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \text{ avec } D = \lim_{\tau \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0} \frac{M \lambda^2}{\tau}.$$

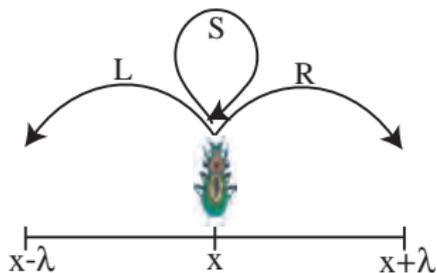
Modèle particulaire vs diffusion

Densité de particules (10^4 indiv.) Eq. de diffusion $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Ici, $\tau = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $\lambda \simeq 0.08$, $M = 0.4$ et $D = M\lambda^2/\tau = 1$.

Dispersion diffusive, avec biais directionnel

Population de U individus indépendants. Marche aléatoire :



Pas de temps $\tau \ll 1$ pas d'espace $\lambda \ll 1$, population $U \gg 1$.

Densité de population (normalisée par U) $u(t, x)$ tend vers la solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\tau}(R-L)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2\tau}(R+L)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Modèle particulaire vs diffusion (avec biais à droite)

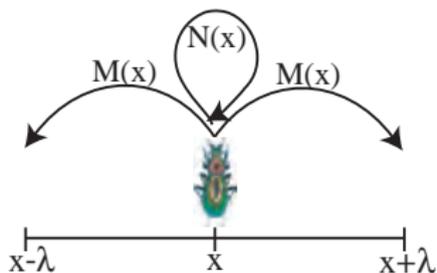
Densité de particules (10^4 indiv.) vs Eq. de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\tau}(R-L)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2\tau}(R+L)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ici, $\tau = 0.01$, $\lambda = 0.15$, $R = 1/2$ et $L = 1/3$.

Dispersion diffusive, milieu hétérogène

Population de U individus indépendants. Marche aléatoire :



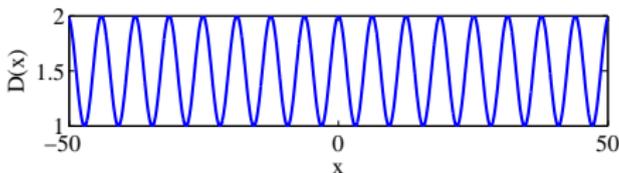
Pas de temps $\tau \ll 1$ pas d'espace $\lambda \ll 1$.

L'espérance de la densité de population (normalisée par U) $u(t, x)$ tend vers la solution de **l'équation de Fokker-Planck** :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 (D(x) u)}{\partial x^2},$$

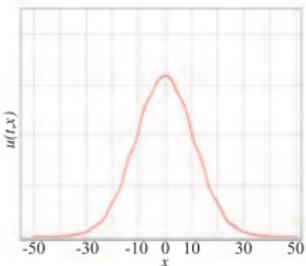
avec $D(x) := \lim_{\tau \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0} M(x) \frac{\lambda^2}{\tau} > 0$.

Diffusion hétérogène: Fick vs Fokker-Planck



Equation de **Fick**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$



Chaleur, polluants ...

vs

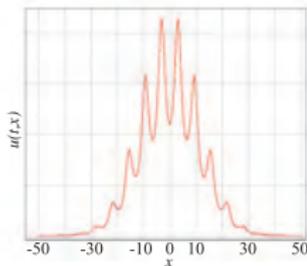
vs

vs

vs

Equation de **Fokker-Planck**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 (D(x) u)}{\partial x^2}$$



Propagules, ...

Equation de la diffusion en dimension $d \geq 2$

Equation de la diffusion en dimension $d \geq 2$

milieu homogène

Obtenu avec les mêmes arguments qu'en dimension 1. On remplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ par l'opérateur *Laplacien* :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

où x_1, \dots, x_d sont les variables d'espace.

En environnement homogène, sans biais.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

En environnement homogène, avec biais. Terme de biais constant, dans une direction $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \mathbf{v} \cdot \nabla u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Le terme ∇u correspond au gradient de u par rapport aux variables d'espace x_1, \dots, x_d .

Equation de la diffusion en dimension $d \geq 2$

milieu hétérogène

Deux versions de l'équation de la diffusion peuvent à nouveau être construites :

- l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(D(t, x)u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d ;$$

- l'équation de Fick :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(t, x)\nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Le coefficient $D(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles (strictement positive) :

- "coefficient de mobilité" (Fokker-Planck) ;
- "coefficient de diffusivité" (Fick).

Rappel :

$$\operatorname{div}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_i}.$$

Equation de la diffusion en dimension $d \geq 2$, milieu hétérogène

milieu hétérogène avec biais

Soit $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ un champ de vecteurs dépendant du temps. Ajout d'un terme de biais :

$$-\operatorname{div}(u \mathbf{v}(t, \mathbf{x})),$$

au membre de droite de l'équation, par exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(D(t, \mathbf{x})u) - \operatorname{div}(u \mathbf{v}(t, \mathbf{x})), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

L'équation doit être **conservative** : pas de création ni de perte de matière (d'individus). Contre-exemples :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t, \mathbf{x})\Delta(u), \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(Du) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Equation de la diffusion sur des domaines bornés

Equation de la diffusion sur des domaines bornés

milieu homogène

Ecriture du problème. Le problème de Cauchy associé à l'équation de la diffusion dans un borné Ω s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \text{condition au bord de } \Omega, \\ \text{condition initiale : } u(0, x) = u_0(x). \end{array} \right.$$

Conditions au bord classiques :

- *la condition de Dirichlet.* Aussi appelée *condition absorbante* (non-conservative). Dans ce cas, on fixe

$$u(t, x) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in \partial\Omega.$$

- *la condition de Neumann.* Aussi appelée *condition réfléchissante* (conservative). Dans ce cas, on fixe

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) := \nabla u(t, x) \cdot \nu(x) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } x \in \partial\Omega,$$

où $\nu(x)$ est la normale sortante à $\partial\Omega$ au point x .

Equation de la diffusion sur des domaines bornés

milieu hétérogène

En milieu hétérogène, ou comportant un terme de biais, l'écriture de conditions réfléchissantes est plus complexe.

Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(t, x)\nabla u) - \operatorname{div}(u\mathbf{v}(t, x)), \quad t > 0, \quad x \in \Omega.$$

Pour obtenir une condition au bord réfléchissante, on écrit :

$$D(t, x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) - \mathbf{v}(t, x) \cdot \nu(x) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

L'obtention de cette condition au bord se fait en cherchant à conserver la masse totale : on écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(t, x) dx = 0.$$

Equations de réaction-diffusion

Modèles de réaction-diffusion: présentation

Forme générale :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \underbrace{\Delta(D(x)u)}_{\text{dispersion}} + \underbrace{f(x, u)}_{\text{croissance}}, \quad t > 0, x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Conditions supplémentaires : condition initiale et condition au bord.

Terme de biais : ajouter $-\operatorname{div}(u \vec{v}(x))$.

Modèles de réaction-diffusion : outils d'analyse

- **Principes de comparaison :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \Delta(D(x)v) + f(x, v) \Rightarrow v \geq u ;$$

- **Principes du maximum fort :** $v \not\equiv u \Rightarrow v > u$;
- **Décomposition spectrale :** critères de persistance basés sur le signe d'une valeur propre :

$$\lambda_1 < 0 \Rightarrow u(t, x) \rightarrow p(x), \quad \lambda_1 \geq 0 \Rightarrow u(t, x) \rightarrow 0.$$

Modèles de réaction-diffusion : propagation

Front de colonisation (traveling wave) :

solution qui se propage à vitesse constante v : $u(t, x) = U(x - vt)$

La vitesse v **devient une inconnue** supplémentaire de l'équation.

Milieux homogènes :

Propriétés remarquables des équation de réaction-diffusion :

- existence de ces solutions (avec et sans effet Allee) ;
- stabilité (attirent les solutions) ;

Applications : étude de la vitesse de propagation.

Modèles de réaction-diffusion : propagation

Front de colonisation (traveling wave) :

solution qui se propage à vitesse constante v : $u(t, x) = U(x - vt)$

La vitesse v **devient une inconnue** supplémentaire de l'équation.

Milieus hétérogènes :

Propriétés remarquables des équation de réaction-diffusion :

- existence de ces solutions (avec et sans effet Allee) ;
- stabilité (attirent les solutions) ;

Applications : étude de la vitesse de propagation.

Equations de réaction-diffusion : quelques exemples d'applications

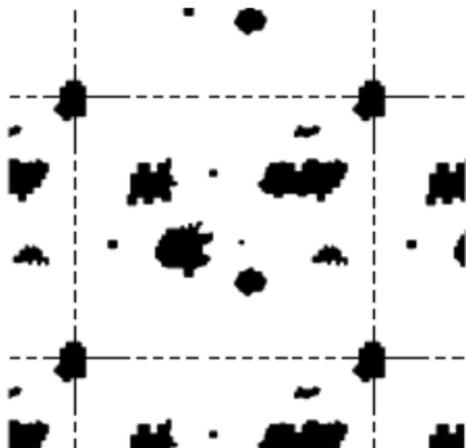
Exemple 1 : persistance et extinction, effet de la fragmentation

Modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + r(x)u \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

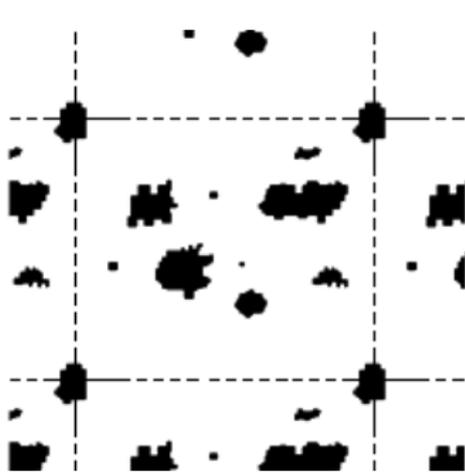
Taux de croissance intrinsèque $r(x)$ hétérogène en espace.

Exemple : r prend deux valeurs, $r^+, r^- \in \mathbb{R}$ ($r^+ > r^-$) :

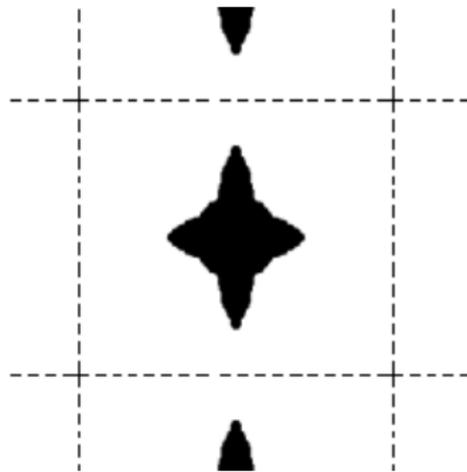


Exemple 1 : persistance et extinction, effet de la fragmentation

Définition de réarrangements de l'habitat permettant d'optimiser le succès d'une installation :



(a) Avant

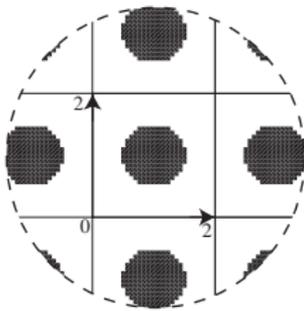


(b) Après

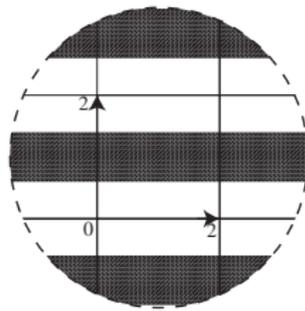
Figure: **Résultat analytique** : la config. (b) offre toujours un meilleur succès d'installation

Exemple 1 : persistance et extinction

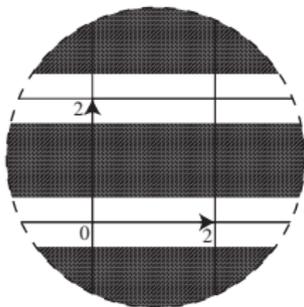
Optimisation numérique



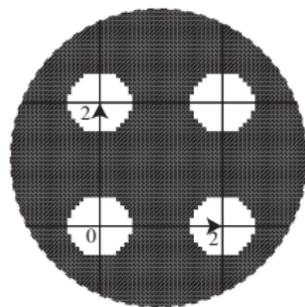
(a) $h = 0.2$



(b) $h = 0.4$



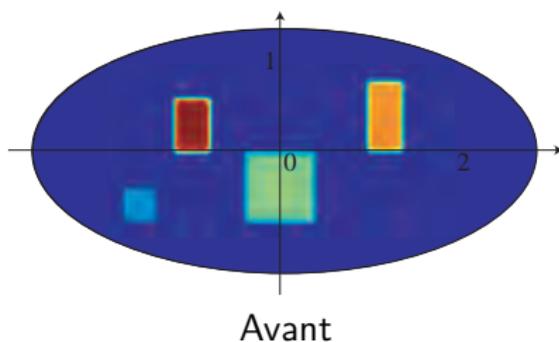
(c) $h = 0.6$



(d) $h = 0.8$

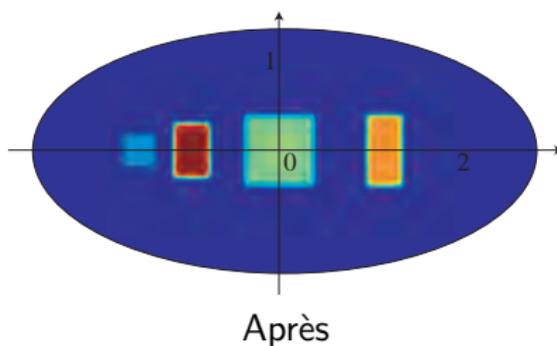
Exemple 1 : persistance et extinction, effet de la fragmentation

Généralisation (environnement non nécessairement binaire) :



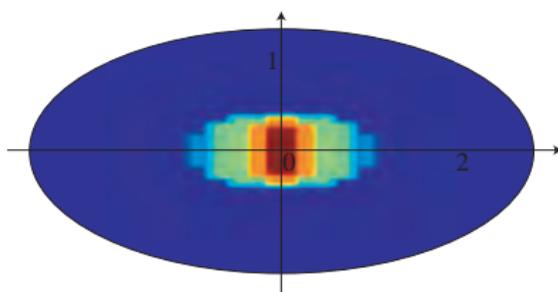
Exemple 1 : persistance et extinction, effet de la fragmentation

Généralisation (environnement non nécessairement binaire) :



Exemple 1 : persistance et extinction, effet de la fragmentation

Généralisation (environnement non nécessairement binaire) :



Après après ...

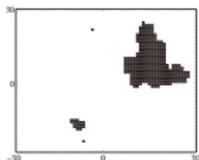
Exemple 2 : distribution spatiale de la population initiale

Modèle :

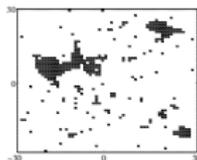
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + u (1 - u) (u - \rho), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Présence d'un effet Allee fort : $\rho > 0$.

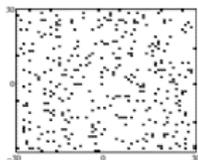
Distribution de la population initiale :



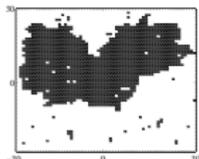
(a) $h = 0.1, fr = 0.05$



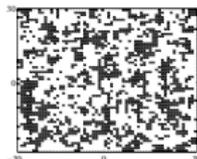
(b) $h = 0.1, fr = 0.4$



(c) $h = 0.1, fr = 0.9$



(d) $h = 0.4, fr = 0.05$



(e) $h = 0.4, fr = 0.4$

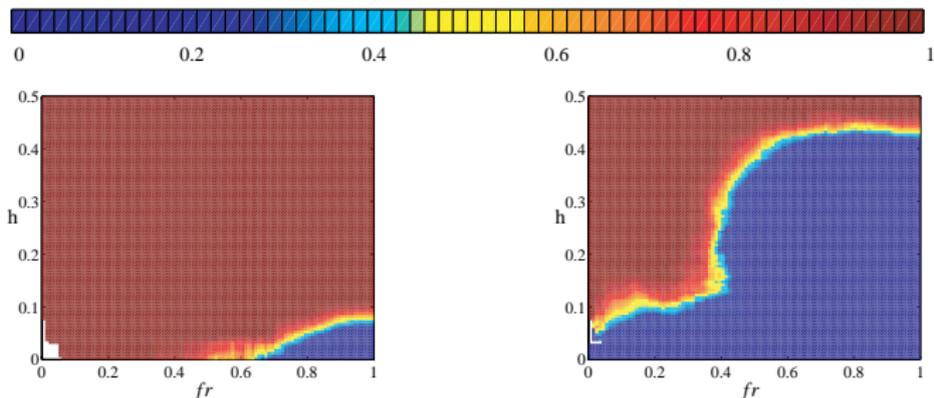


(f) $h = 0.4, fr = 0.9$

Exemple 2 : distribution spatiale de la population initiale

La fragmentation (fr) et l'abondance (h) ont un rôle déterminant sur le succès d'installation :

Taux de succès de l'installation



Effet Allee peu important ($\rho = 0.1$)

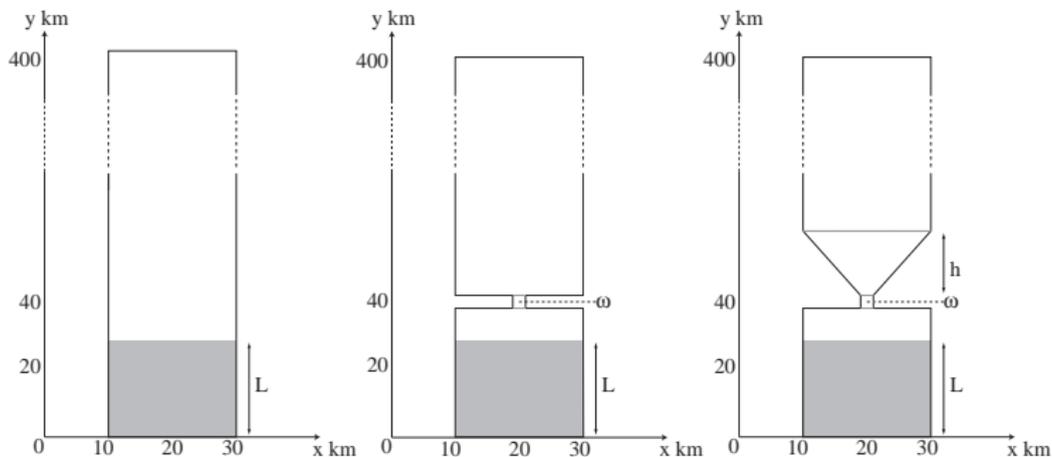
Effet Allee très fort ($\rho = 0.45$)

Exemple 3 : géométrie de l'environnement

Modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + u(1-u)(u-\rho), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Passage à travers un corridor (effet Allee fort + conditions réfléchissantes au bord) :



Exemple 3 : géométrie de l'environnement

Modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + u (1 - u) (u - \rho), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

Passage à travers un corridor (effet Allee fort + conditions réfléchissantes au bord) :

Exemple 4 : dynamique de la diversité génétique dans un front de colonisation

- **Modèle** : $u(t, x)$ densité de gènes.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

- **Hypothèse** : $u(t, x)$ est la somme de fractions neutres à $t = 0$:

$$u(0, x) = \sum_{i \in I} v_0^i(x).$$

- **Objectif** : décrire la dynamique des fractions $v^i(t, x)$.

Exemple 4 : dynamique de la diversité génétique dans un front de colonisation

Décomposition du front en fractions neutres

Système vérifié par les fractions :

$$\begin{cases} \frac{\partial v^i}{\partial t} = D \Delta u + v^i f(u)/u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq v_0^i(x) \leq u(0, x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

L'unicité de la solution du problème vérifié par u implique :

$$u(t, x) = \sum_{i \in I} v^i(t, x), \quad \forall t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

→ bonne décomposition de $u(t, x)$ en fractions neutres.

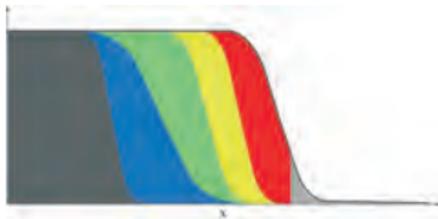
Modèle : équation de réaction-diffusion

- **Fonction de croissance** : $f(u)$ **logistique** vs **effet Allee fort**.
- $u(t, x) = U(x - ct)$ est un front de colonisation :

- **Objectif** : étudier l'effet de f sur la diversité.

Modèle : équation de réaction-diffusion

- **Fonction de croissance** : $f(u)$ **logistique** vs **effet Allee fort**.
- $u(t, x) = U(x - ct)$ est un front de colonisation :



- **Objectif** : étudier l'effet de f sur la diversité.

Résultats : cas logistique

Théorème

Si f est du type **logistique** (KPP) et si v_0 converge vers 0 plus vite que U quand $x \rightarrow +\infty$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \max_{x \geq 0} v(t, x + \varepsilon t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

→ **forte érosion de la diversité.**

Résultats : cas avec effet Allee fort

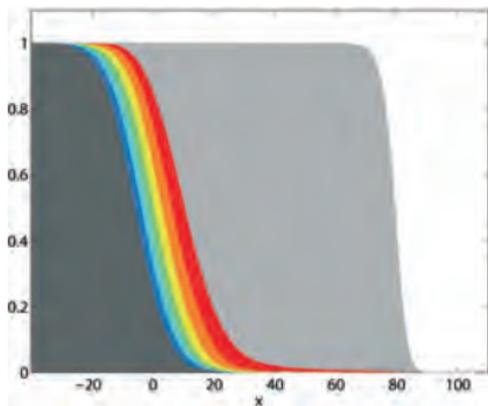
Théorème

Si f est du type **effet Allee fort** alors il existe $p = p[v_0] \in]0, 1]$ (formule explicite) tel que

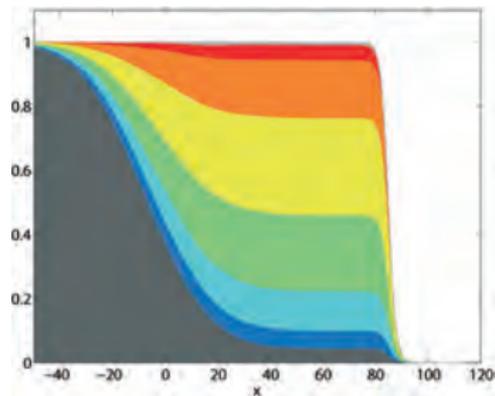
$v(t, x + ct) \rightarrow p U(x)$ quand $t \rightarrow +\infty$ sur tout compact.

→ **maintien de la diversité.**

Deux types de dynamiques internes



Pas d'effet Allee (logistique)



Effet Allee fort

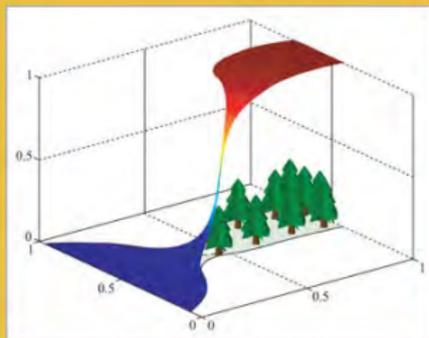
L'effet Allee améliore la diversité neutre intraspécifique



Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale

AVEC
EXERCICES
DIRIGÉS

Lionel Roques



éditions
Quæ